УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 152, кн. 1 Физико-математические науки *2010*

УДК 517.982.1+517.983.27

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМ КРЕЙНА – ШМУЛЬЯНА И ЛОЗАНОВСКОГО НА СЛУЧАЙ МЕТРИЗУЕМЫХ ПРОСТРАНСТВ С КОНУСОМ

Л.В. Веселова, О.Е. Тихонов

Аннотация

Теорема Крейна – Шмульяна о несплющенности замкнутого порождающего конуса в банаховом пространстве и результат Лозановского об автоматической непрерывности линейных положительных операторов обобщены на случай полных метризуемых топологических векторных пространств.

Ключевые слова: метризуемое топологическое векторное пространство, конус, положительный линейный оператор, теорема Крейна – Шмульяна.

Цель настоящей статьи – обобщить на случай полных метризуемых топологических векторных пространств классическую теорему Крейна – Шмульяна о несплющенности замкнутого порождающего конуса в банаховом пространстве и перенести на этот случай результат Г.Я. Лозановского об автоматической непрерывности линейных положительных операторов. Заметим, что в работе П.П. Забрейко [1] было получено некоторое расширение теоремы Крейна – Шмульяна на метризуемые пространства, однако наш подход отличается от подхода [1] как по технике доказательства, так и по форме полученного результата. Более того, мы несколько ослабляем требования на рассматриваемый конус, заменяя обычное требование замкнутости на условие, которое называем «наполненностью». Таким образом, уже в случае банаховых пространств мы получаем определенное усиление известных до сих пор результатов в рассматриваемом направлении.

Некоторые вспомогательные утверждения представляется естественным формулировать в рамках метризуемых топологических абелевых групп.

Определение 1. Пусть G – абелева группа по сложению. Функцию $\|\cdot\|\colon G \to \mathbb{R}^+$ будем называть *g-нормой,* если она удовлетворяет следующим условиям:
(a) $\|x\| = 0 \iff x = 0 \quad (x \in G)$;
(b) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\| \quad (x, y \in G)$;
(c) $\|-x\| = \|x\| \quad (x \in G)$.

Отметим, что формула $\rho(x,y) = \|x-y\|$ задает взаимнооднозначное соответствие между инвариантными относительно сдвигов метриками ρ и g-нормами $\|\cdot\|$ на G и, говоря о сходимости, полноте и т. п. относительно g-нормы, будем подразумевать выполнение того или иного свойства относительно соответствующей инвариантной метрики. Две g-нормы на одной и той же абелевой группе будем называть *эквивалентными*, если соответствующие им инвариантные метрики эквивалентны, то есть задают одну и ту же топологию.

Предложение 1. *Для подполугруппы S абелевой группы G с g-нормой $\|\cdot\|$ эквивалентны следующие условия:*

(i) *любая фундаментальная последовательность $\{x_n\}$ элементов из S такая, что $x_{n+1} - x_n \in S$ для всех $n \in \mathbb{N}$, сходится к некоторому $x \in S$;*

(ii) *если $x_n \in S$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится по g-норме к некоторому $x \in S$.*

Доказательство. Заметим сразу, что доказательство этого предложения практически ничем не отличается от доказательства хорошо известного критерия полноты нормированного пространства (см., например, [2, п. 148.4]).

(i) $\Longrightarrow$ (ii). Эта импликация сразу следует из того, что сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ влечет фундаментальность последовательности частных сумм $\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right\}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Пусть выполнено условие (ii) и пусть $\{x_n\}$ – такая фундаментальная последовательность элементов из S, что $x_{n+1} - x_n \in S$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, мы можем считать, не ограничивая тем самым общности, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_{n+1} - x_n\| < \infty$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1} - x_n)$ сходится к некоторому $x \in S$, и поэтому $x_n \to x_1 + x \in S$. $\square$

Замечание 1. Взяв в предложении 1 в качестве S саму группу G, мы получаем критерий полноты абелевой группы с g-нормой.

Определение 2. Подполугруппу S абелевой группы G с g-нормой $\|\cdot\|$ будем называть *наполненной*, если для нее выполняется одно из эквивалентных условий предложения 1.

Замечание 2. Используя условие (i), нетрудно убедиться, что свойство быть наполненной для подполугруппы инвариантно относительно перехода к эквивалентной g-норме.

Определение 3. Пусть $(G, \|\cdot\|)$ – абелева группа с g-нормой. Подполугруппа S называется *порождающей*, если любой $x \in G$ может быть представлен в виде $x = x' - x''$, где x', $x'' \in S$. Если для некоторого $\lambda > 0$ такие x', x'' всегда можно подобрать так, что $\|x'\| + \|x''\| \leq \lambda\|x\|$, то S будем называть λ*-порождающей*. В этом случае будем говорить также, что S λ*-порождает* G.

Лемма 1. *Пусть подполугруппа S абелевой группы G с g-нормой $\|\cdot\|$ является наполненной и λ-порождающей при некотором $\lambda > 0$. Тогда G как метрическое пространство полно.*

Доказательство. Воспользуемся замечанием 1. Пусть x_n из G таковы, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$. Для каждого n найдем $x_n', x_n'' \in S$ такие, что $x_n = x_n' - x_n''$ и $\|x_n'\| + \|x_n''\| \leq \lambda\|x_n\|$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n'\| < \infty$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n''\| < \infty$, следовательно, сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n'$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n''$, поэтому сходится и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$. $\square$

Лемма 2. *Пусть S – наполненная и содержащая 0 подполугруппа абелевой группы G с g-нормой $\|\cdot\|_G$, E – подгруппа, порожденная полугруппой S. Формула*

$$\|x\|_E = \inf\{\|x'\|_G + \|x''\|_G \mid x', x'' \in S,\ x = x' - x''\}$$

задает g-норму на E, относительно которой пространство E как метрическое пространство полно. Для любого $x \in E$ имеем: $\|x\|_E \geq \|x\|_G$, а для $x \in S$ имеем: $\|x\|_E = \|x\|_G$. В группе E с g-нормой $\|\cdot\|_E$ полугруппа S наполненная и λ-порождающая при любом $\lambda > 1$. Если полугруппа S замкнута в $(G, \|\cdot\|_G)$, то она замкнута и в $(E, \|\cdot\|_E)$.

Доказательство. Изучим прежде всего взаимосвязь функций $\|\cdot\|_E$ и $\|\cdot\|_G$ на E и на S. Для любого представления $x \in E$ в виде разности $x = x' - x''$ элементов из S имеется оценка нормы $\|x\|_G = \|x' - x''\|_G \leq \|x'\|_G + \|x''\|_G$, поэтому

$$\|x\|_G \leq \inf\{\|x'\|_G + \|x''\|_G \mid x', x'' \in K, x = x' - x''\} = \|x\|_E.$$

Если $x \in S$, то $x = x - 0$ – одно из представлений x в виде разности элементов из S, поэтому

$$\|x\|_E = \inf\{\|x'\|_G + \|x''\|_G \mid x', x'' \in K, x = x' - x''\} \leq \|x\|_G + \|0\|_G = \|x\|_G.$$

Проверим теперь выполнение для функции $\|\cdot\|_E$ на E аксиом g-нормы. Неотрицательность функции $\|\cdot\|_E$ очевидна. Ее точность следует из неравенства $\|x\|_G \leq \|x\|_E$. Свойство (c), $\|-x\|_E = \|x\|_E$, проверяется тривиально. Докажем неравенство треугольника. Пусть $x = x_1 + x_2$ $(x_1,\, x_2 \in E)$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ и $i = 1, 2$ выберем $x_i', x_i'' \in S$ так, что $x_i = x_i' - x_i''$ и $\|x_i'\|_G + \|x_i''\|_G \leq \|x_i\|_E + \varepsilon/2$. Тогда $x = (x_1' + x_2') - (x_1'' + x_2'')$ и

$$\|x\|_E \leq \|x_1' + x_2'\|_G + \|x_1'' + x_2''\|_G \leq$$
$$\leq \|x_1'\|_G + \|x_1''\|_G + \|x_2'\|_G + \|x_2''\|_G \leq$$
$$\leq \|x_1\|_E + \|x_2\|_E + \varepsilon.$$

Отсюда в силу произвольности ε следует, что $\|x\|_E \leq \|x_1\|_E + \|x_2\|_E$.

Докажем, что S является наполненной в $(E, \|\cdot\|_E)$. Пусть $x_n \in S$ таковы, что $x_{n+1} - x_n \in S$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна по g-норме $\|\cdot\|_E$. Тогда $\{x_n\}$ фундаментальна и по g-норме $\|\cdot\|_G$, следовательно, $\|x - x_n\|_G \to 0$ для некоторого $x \in S$. Однако $x - x_n = \lim\limits_{m\to\infty}(x_m - x_n)$ по g-норме $\|\cdot\|_G$ при каждом $n \in \mathbb{N}$, поэтому $x - x_n \in S$ и, следовательно, $\|x - x_n\|_E \to 0$.

Из определения $\|\cdot\|_E$ и совпадения $\|\cdot\|_E$ с $\|\cdot\|_G$ на S ясно, что S λ-порождает E при любом $\lambda > 1$. Из леммы 1 тогда следует, что относительно $\|\cdot\|_E$ пространство E как метрическое пространство полно.

Если полугруппа S замкнута в $(G, \|\cdot\|_G)$, то замкнутость S в $(E, \|\cdot\|_E)$ тривиально выводится из неравенства $\|x\|_G \leq \|x\|_E$ $(x \in E)$. $\square$

Пусть теперь X – векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. Напомним, что подмножество K называется *клином*, если $K + K \subset K$ и $\alpha K \subset K$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Если дополнительно $K \bigcap (-K) = \{0\}$, то такой клин называется *конусом*.

Векторное пространство является абелевой группой по сложению, а клин в нем – подполугруппой. Это дает возможность рассматривать g-нормы на векторном пространстве и говорить о наполненности клина в векторном пространстве с g-нормой.

g-норма $\|\cdot\|$ на векторном пространстве X называется *F-нормой*, если умножение $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ $(\alpha \in \mathbb{R},\ x \in X)$ совместно непрерывно. F-норма $\|\cdot\|$ называется *неубывающей*, если $\|\alpha x\| \le \|x\|$ для любых $x \in X$, $0 \le \alpha \le 1$. Полное пространство с F-нормой называется *F-пространством*.

Лемма 3. *Пусть $\|\cdot\|_X$ – неубывающая F-норма на X, клин K в пространстве $(X, \|\cdot\|_X)$ является наполненным. Построим $(E, \|\cdot\|_E)$ как в лемме 2, взяв X в качестве G, а K в качестве S, то есть положим: $E = K - K$, $\|x\|_E = \inf\{\|x'\|_X + \|x''\|_X \mid x', x'' \in K,\ x = x' - x''\}$. Тогда $(E, \|\cdot\|_E)$ – F-пространство.*

Доказательство. Как легко проверить, E есть линейное подпространство X. Остается установить совместную непрерывность в $(E, \|\cdot\|_E)$ операции умножения на скаляр. Согласно теореме II.1.12 [3] для этого достаточно проверить раздельную непрерывность, а значит, показать, что

1) $\|\alpha x_n\|_E \to 0$, если $\|x_n\|_E \to 0$ $(\alpha \in \mathbb{R})$;

2) $\|\alpha_n x\|_E \to 0$, если $\alpha_n \to 0$ $(x \in E)$.

Для доказательства 1) предположим без ограничения общности, что $\alpha > 0$, и обозначим через $[\alpha]$ целую часть α. Для каждого натурального n подберем $x'_n, x''_n \in K$ так, что $x_n = x'_n - x''_n$ и $\|x'_n\|_X + \|x''_n\|_X \to 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\|\alpha x_n\|_E &\le \|\alpha x'_n\|_X + \|\alpha x''_n\|_X \le \\ &\le \|\,[\alpha] x'_n\|_X + \|(\alpha - [\alpha]) x'_n\|_X + \|\,[\alpha] x''_n\|_X + \|(\alpha - [\alpha]) x''_n\|_X \le \\ &\le ([\alpha] + 1)(\|x'_n\|_X + \|x''_n\|_X) \to 0.\end{aligned}$$

Для доказательства 2) возьмем такие x', $x'' \in K$, что $x = x' - x''$. Тогда

$$\|\alpha_n x\|_E = \|\,|\alpha_n|\, x\,\|_E \le \|\,|\alpha_n|\, x'\,\|_X + \|\,|\alpha_n|\, x''\,\|_X \to 0,$$

так как $\|\cdot\|_X$ есть F-норма и $|\alpha_n| \to 0$. □

Теорема 1 аналог теоремы Крейна – Шмульяна. *Пусть K – порождающий наполненный клин в F-пространстве $(X, \|\cdot\|)$. Тогда относительно некоторой эквивалентной F-нормы клин K является λ-порождающим при любом $\lambda > 1$.*

Доказательство. Согласно теореме I.2.2 [4] формула

$$\|x\|_0 = \sup_{0 \le \beta \le 1} \|\beta x\|, \quad x \in X,$$

определяет неубывающую F-норму $\|\cdot\|_0$, эквивалентную исходной F-норме $\|\cdot\|$. Построим $\|\cdot\|_1$ аналогично конструкции леммы 2:

$$\|x\|_1 = \inf\{\|x'\|_0 + \|x''\|_0 \mid x', x'' \in K,\ x = x' - x''\}, \quad x \in X.$$

Согласно леммам 2 и 3 пространство $(X, \|\cdot\|_1)$ является F-пространством, в котором клин K является λ-порождающим при любом $\lambda > 1$. Так как $\|x\|_1 \le \|x\|_0$ для всех $x \in X$, то F-норма $\|\cdot\|_1$ эквивалентна $\|\cdot\|_0$ (см. теорему II.2.5 [3]), а значит, эквивалентна и $\|\cdot\|$. □

В [5] доказан ряд следствий теоремы 1 аналогичных следствиям из теоремы Крейна – Шмульяна, приведенным в [6, 7]. Здесь мы ограничимся одним из них. Заметим, что утверждение, сформулированное в замечании 2, позволяет нам говорить о наполненности клина в метризуемом топологическом векторном пространстве.

Следствие 1. *Пусть X_1 и X_2 – полные метризуемые топологические векторные пространства, K_1 – порождающий наполненный клин в X_1, K_2 – замкнутый конус в X_2. Тогда любой линейный оператор из X_1 в X_2, отображающий K_1 в K_2, является непрерывным.*

Доказательство. Согласно теореме 1 можем считать, что X_1 есть F-пространство с F-нормой $\|\cdot\|_1$, относительно которой клин K_1 является наполненным и λ-порождающим при некотором $\lambda > 1$.

По теореме о замкнутом графике (см., например, теорему II.2.4 [3]) для доказательства непрерывности оператора T достаточно доказать его замкнутость. Пусть $\{x_n\}$ – последовательность в X_1 такая, что $\|x_n\|_1 \to 0$ и $Tx_n \to y$ в пространстве X_2. Нужно показать, что $y = 0$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\|x_n\|_1 < \infty$. Для каждого x_n возьмем $x'_n, x''_n \in K_1$ такие, что $x_n = x'_n - x''_n$ и $\|x'_n\|_1 + \|x''_n\|_1 \le \lambda\|x_n\|_1$, и положим $u_n = x'_n + x''_n$. Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|nu_n\|_1 \le \sum_{n=1}^{\infty} n\|u_n\|_1 \le \sum_{n=1}^{\infty} n(\|x'_n\|_1 + \|x''_n\|_1) \le \lambda \sum_{n=1}^{\infty} n\|x_n\|_1 < +\infty,$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nu_n$ сходится к некоторому $w \in K_1$. Используя обозначение $s \le t$, если $t - s \in K_i$ $(s, t \in X_i)$, имеем:

$$-w \le -nu_n \le nx_n \le nu_n \le w,$$

откуда

$$-\frac{1}{n}Tw \le Tx_n \le \frac{1}{n}Tw.$$

Так как конус K_2 замкнут, в последних неравенствах можно перейти к пределам и получить $0 \le y \le 0$, то есть $y = 0$. □

Следствие 1 обобщает результат Г.Я. Лозановского (впервые опубликованный, по всей видимости, в [8]) об автоматической непрерывности положительных операторов в упорядоченных банаховых пространствах, который, как отмечалось в [6], являлся сильнейшим в этом направлении на тот момент. Отметим, что приведенное выше доказательство представляет из себя приспособленное к рассматриваемой ситуации доказательство теоремы 2.1 из [9].

В заключение обсудим свойство наполненности, введенное в определении 2. Ясно, что этим свойством обладают замкнутые подгруппы абелевой группы с g-нормой, если рассматриваемая группа полна как метрическое пространство. Существуют, однако, примеры и другого типа. Тривиально проверяется, что клин K в нормированном пространстве является наполненным тогда и только тогда, когда он идеально выпуклый в смысле Е.А. Лифшица [10] (см. также раздел 1.6 [9]): для произвольной ограниченной последовательности $\{x_n\} \subset K$ и любой такой последовательности $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{R}^+$, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ сходится к элементу из K. Из упражнения 1.14 [9] тогда следует, что любой клин в конечномерном пространстве является наполненным. Другой содержательный пример можно привести в рамках подхода к теории интегрирования относительно точного нормального полуконечного веса φ на алгебре фон Неймана M, предложенного А.Н. Шерстневым (см. [11, 12]): в банаховом пространстве $L_1^h(\varphi)$ эрмитовых интегрируемых билинейных форм конус замыкаемых положительных интегрируемых билинейных форм, вообще говоря, незамкнут, в то же время порождает $L_1^h(\varphi)$ и является наполненным.

Работа второго автора поддержана Федеральным агентством по науке и инновациям (госконтракт № 02.740.11.0193).

Summary

L.V. Veselova, O.E. Tikhonov. An Extension of the Krein – Šmulian and Lozanovskii Theorems to the Case of Metrizable Spaces with a Cone.

The Krein – Šmulian theorem and a Lozanovskii result on automatical continuity of positive linear operators are extended to the case of complete metrizable topological vector spaces.

Key words: metrizable topological vector spaces, cone, positive linear operator, Krein – Šmulian theorem.

Литература

1. *Забрейко П.П.* Об одной теореме для полуаддитивных функционалов // Функц. анализ и его прилож. – 1969. – Т. 3, Вып. 1. – С. 86–87.
2. *Шерстнев А.Н.* Конспект лекций по математическому анализу. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2005. – 374 с.
3. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Общая теория. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 896 с.
4. *Rolewicz S.* Metric linear spaces. – Warszawa: PWN, 1972. – 287 p.
5. *Веселова Л.В., Тихонов О.Е.* Обобщение теоремы М. Крейна – Шмульяна на случай метризуемых пространств с конусом. Препринт 0003-2006. – Казань: НИИММ КГУ, 2006. – URL: http://www.niimm.ksu.ru/data/preprints/thepreprints/0003-2006.pdf
6. *Abramovich Y.A., Aliprantis C.D.* Positive operators // Handbook of the Geometry of Banach Spaces. – Amsterdam: Elsevier, 2001. – V. 1. – P. 85–122.
7. *Abramovich Y.A., Aliprantis C.D., Burkinshaw O.* Positive operators on Krein spaces // Acta Appl. Math. – 1992. – V. 27. – P. 1–22.
8. *Вулих Б.З.* Специальные вопросы геометрии конусов в нормированных пространствах. – Калинин: Калин. гос. ун-т, 1978. – 84 с.
9. *Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В.* Позитивные линейные системы: метод положительных операторов. – М.: Наука, 1985. – 255 с.
10. *Лифшиц Е.А.* Идеально выпуклые множества // Функц. анализ и его прил. – 1970. – Т. 4, Вып. 4. – С. 76–77.
11. *Трунов Н.В., Шерстнев А.Н.* Введение в теорию некоммутативного интегрирования // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж. – М.: ВИНИТИ, 1985. – Т. 27. – С. 167–190.
12. *Шерстнев А.Н.* Методы билинейных форм в некоммутативной теории меры и интеграла. – М.: Физматлит, 2008. – 264 с.

Поступила в редакцию
21.09.09

Веселова Лидия Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Казанского государственного технологического университета.

Тихонов Олег Евгеньевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической статистики Казанского государственного университета.

E-mail: *Oleg.Tikhonov@ksu.ru*